

Chapitre : ...Arithmétique.....

I- ...Diviseurs et nombres premiers.....

Définition : Soit a et b deux entiers naturels, b non nul. On dit que b divise a (ou que b est un diviseur de a) lorsqu'il existe un entier k tel que $a = bk$. On dit aussi, dans ce cas, que a est un multiple de b .

Exemple : $15 = 3 \times 5$, on peut dire que 15 est un multiple de 3 ou 3 est un diviseur de 15.

Définition : Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts 1 et lui-même.

Exemples : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17

Contre-exemple : 9 est divisible par 1 ; 3 et 9. Comme 9 admet plus de 2 diviseurs alors 9 n'est pas un nombre premier.

Définition : Un **diviseur commun** de deux nombres a et b est un nombre qui divise à la fois a et b .

Exemple: Les diviseurs communs à 10 et 20 sont : 1 ; 2 ; 5 et 10.

Définition : Deux nombres entiers sont dits **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Exemple : les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12

les diviseurs de 35 sont : 1 ; 5 ; 7 et 35

Comme le seul diviseur commun à 12 et 35 est 1 alors ils sont premiers entre eux.

Définition : Le **PPCM de deux nombres entiers naturels** (non nuls) est le plus petit multiple commun non nul.

Exemple : PPCM (8 ; 12) = 24

8 16 (24)) on note les multiples et on identifie le plus petit commun
12 (24) 36

Pour le trouver avec la calculatrice :

Définition : PGCD signifie Plus Grand Diviseur Commun. Le **PGCD (a ; b)** est le plus grand des diviseurs commun de a et de b .

Exemple : PGCD (15;20) = 5

Les diviseurs de 15 : 1 ; 3 ; (5) et 15.

Les diviseurs de 20 : 1 ; 2 ; 4 ; (5) ; 10 et 20

Pour le trouver avec la calculatrice :

II- Décomposition en facteurs premiers

Propriété : On peut toujours décomposer un entier naturel non nul, non premier en produit de plusieurs nombres premiers.

Exemple : On peut décomposer 70 en produit de facteurs premiers

$$70 = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ \hline 1 & \end{array} \quad 70 = 2 \times 5 \times 7$$

III- Fractions irréductibles

Définition : Soit a et b deux entiers, $b \neq 0$. On dit que $\frac{a}{b}$ est une **fraction irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple : $\frac{4}{7}$ Le seul diviseur commun à 4 et 7 est 1 d'où $\frac{4}{7}$ est une fraction irréductible.

Méthode pour rendre une fraction irréductible : on décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis on simplifie.

$$\text{Exemple : } \frac{924}{1470} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11}{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7} = \frac{22}{35}$$

$$\text{ou à l'aide du pgcd } (924, 1470) = 42 \quad \frac{924}{1470} = \frac{924 : 42}{1470 : 42} = \frac{22}{35}$$

ANNEXE :

Activité : Liste des nombres entiers inférieurs à 100

Cette activité met en oeuvre un algorithme "crible d'Eratosthène" qui permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100.

A) Expliquer pourquoi le nombre 1 n'est pas premier, puis le barrer dans la grille et que le nombre 2 est premier, l'entourer et barrer les multiples de 2.

B) 3 est un nombre premier, l'entourer puis barrer tous les multiples de 3.

C) Entourer le plus petit nombre non barré et barrer tous ses multiples et poursuivre jusqu'à ce qu'on ne puisse plus barrer aucun nombre.

D) Que peut-on dire des nombres entourés ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100